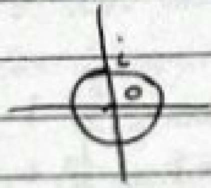
6ο Μάθημα: ① 11/5/17

$f: \tau \to \mathbb{C}$ αναλυτική και συνεχής, $B(a,r) \subseteq \tau$.


$\forall z \in B(a,r), \ f(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (z-a)^\nu.$

Taylor:

Παράδειγμα: $f(z) = \frac{e^z}{z-i}$ $\quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$




$f(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu z^\nu$

$e^z = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$

$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{i}\frac{1}{\frac{z}{i}-1} = \frac{-1}{i}\frac{1}{1-\underbrace{\frac{z}{i}}_{\theta}} = i\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{(i)^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{i^{k+1}}$

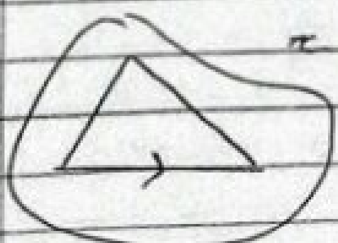
$\left|\frac{z}{i}\right| < 1$

$\nu + k = \lambda$
$k = \lambda - \nu \geq 0$
$0 \leq \nu \leq \lambda$

$f(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{i^{k+1}} = \sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{\overbrace{\nu+k}^{\lambda}}}{\nu!\, i^{k+1}} = \sum_{\lambda=0}^{+\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\lambda}\frac{1}{\nu!\, i^{\lambda-\nu+1}}\right) z^\lambda =$

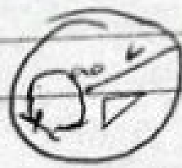
$= \sum_{\nu=0}^{+\infty}\Bigg(\underbrace{\sum_{\mu=0}^{+\infty}\frac{1}{\mu!\, i^{\nu-\mu+1}}}_{a_\nu}\Bigg)\cdot z^\nu$

Goursat:

$f$: 

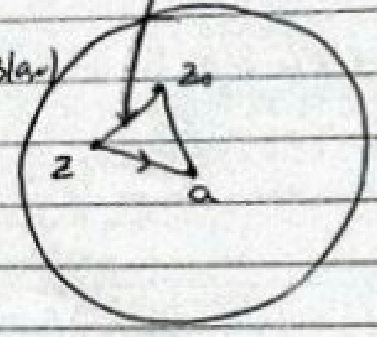
$\tau$ ανοιχτό
$\to \mathbb{C}$
$\Delta \subseteq \tau$ & $\varepsilon\sigma(\Delta) \subseteq \tau$

Morera: $f: \overset{B(a,r)}{\tau} \to \mathbb{C}$ συνεχής & $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \ \forall \Delta \subseteq \tau \ \varepsilon\sigma(\Delta) \subseteq \tau$.
Τότε $\exists\, F: B(a,r) \to \mathbb{C}$. $\boxed{F' = f}$ $\Longrightarrow$




Άρα αν πάρω οποιοδήποτε $\Delta \subseteq B(a,r)$ ισχύει και
κατά την γνωστή διατύπωση $\Rightarrow$ $\boxed{\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0}$

Απόδειξη: Μια παραμετρική παράσταση του $z z_0$ είναι: $\omega = (1-t)z_0 + tz$, $t \in [0,1]$.




$\Delta = [a, z_0, z, a]$. $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ολόκληρο μέσα στο $B(a,r)$, ισχύει:

$$\int_{\Delta} f(z)\,dz = 0 = \int_{[a,z_0)} f + \int_{[z_0,z]} f + \int_{[z,a]} f$$

$$= \int_{[a,z_0]} f - \int_{[a,z]} f = \int_{[z,z_0]} f.$$

Θέτω $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$

Επομένως: $F(z_0) - F(z) = \int_{[z,z_0]} f.$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{z-z_0}\int_0^1 f((1-t)z_0+tz)(z-z_0)\,dt$$

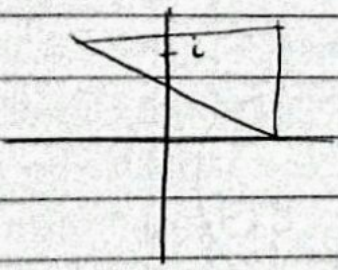
$$= \int_0^1 f((1-t)z_0+tz)\,dt \longrightarrow f(z_0)\int_0^1 dt = f(z_0).$$

Άρα: $F'(z_0) = f(z_0)$ □.

▸ $\boxed{F' = f} \Rightarrow F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{F(\omega)}{\omega - z}\,d\omega \Rightarrow \exists\, F', F'', F''' \ldots$

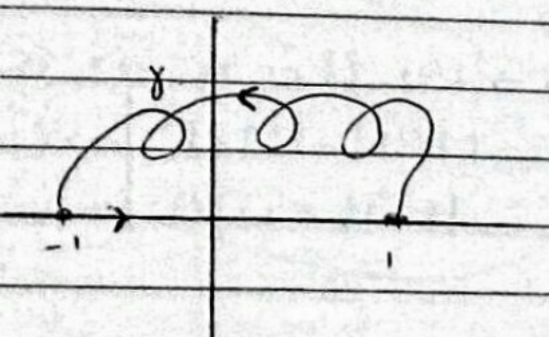
$$F^{(\nu)}(z) = \frac{\nu!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{F(\omega)}{(\omega-z)^{\nu+1}}\,d\omega$$

π.χ. $f(z) = \frac{e^z}{z-i}$ $\mathbb{C} \setminus \{i\}$



⇝ Πήρα ένα τρίγωνο που έχει στο εσωτερικό του το $i$, δεν σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα είναι 0. Για να είναι το ολοκλήρωμα μηδέν, πρέπει όλα τα τρίγωνα να είναι μέσα στο π.ο. εδώ π.ο. είναι $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. Άρα δεν είναι.

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχω αόριστο ολοκλήρωμα είναι να έχω $\int_\gamma f(z)dz = 0$.




$\boxed{f(z) = z + i\cos z}$

Είναι αδύνατο να βρω παραμετρική παράσταση για την γ.

Προσθέτω στην γ και το ευθ. τμήμα -1,1 και έτσι έχω μια κλειστή καμπύλη.

Φτιάχνω λοιπόν: $\Gamma = \gamma + [-1,1]$.

$$\int_\Gamma F(z)dz = 0$$ , αφού είναι κλειστή διαδρομή, δηλαδή f [illegible] παράγουσα

Συνεπώς έχω: $$\int_\Gamma F(z)dz = \int_\gamma F + \underbrace{\int_{[-1,1]} F(z)dz}_{I}$$

$$I = -\int_{-1}^{1} F(x)dx = \int_{-1}^{1} (x + i\cos x)dx =$$

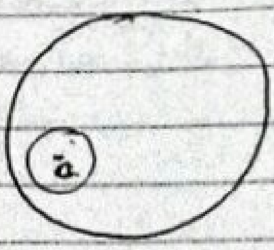
$$= i(\eta\mu(1) - \eta\mu(-1)) = 2i\eta\mu(1)$$

- $f: B(a,r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη.
$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \ \subseteq B(a,r)$.

Απόδειξη:

① $\int_\Delta f = 0$ . (G)

② $\exists F: F' = f$ (M)
$F'' = f'$



- $f$ τοπ. φραγμένη στο $a$:
$\exists V_a$ & $M>0$: $|f(z)| \le M \ \forall z \in V_a$.

Έστω ότι $\underbrace{\exists \lim_{z\to a} f(z) = \ell \in \mathbb{C}}$ $\Rightarrow$ $f$ τοπικά φραγμένη στο $a$.

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall z)\ 0<|z-a|<\delta \Rightarrow |f(z)-\ell| < \varepsilon = 1$ Θέτουμε $\varepsilon=1$.

$||f(z)| - |\ell|| < 1$
$|f(z)| < 1+|\ell|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(z)| < \max\{|f(a)|, 1+|\ell|\} = M$.

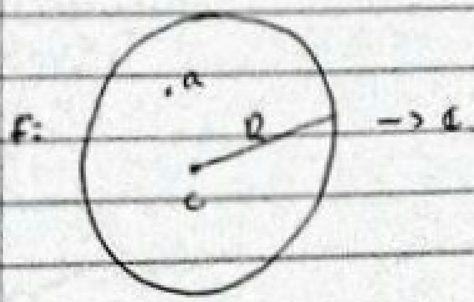
Πχ $f(z) = \dfrac{\eta\mu z}{z}, \ z \neq 0$

$f(z) = \dfrac{\eta\mu z}{z} = \dfrac{1}{z}\left(z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - + \dots\right) = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - + \dots$

Έτσι όταν $z \to 0$ η $f(z) \to 1$. Άρα είναι τοπικά φραγμένη στο 0, γιατί $\exists$ το όριο.

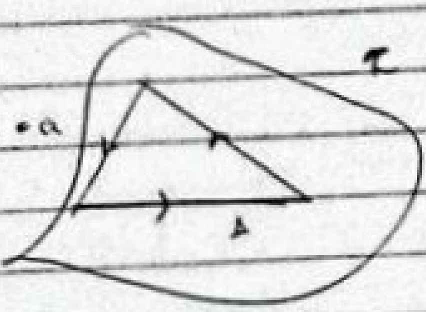
- $f$ ολόμορφη $B(a,R)\setminus\{a\}$.
  $f$ τοπικά φραγμένη στο $a$.
  Τότε, $\forall \gamma \subseteq B(a,R)$ $\int_\gamma f=0$.

<u>Απόδειξη:</u>




παίρνω ένα τρίγωνο και τις διάφορες πιθανές θέσεις του $a$ ως προς το τρίγωνο

(1)




$$\int_\Delta f=0.$$

(2)


$\Delta=\Gamma_r+\gamma_r$ — Συνεπώς ισχύει

λόγω ολομορφίας

$$\int_\Delta f = \int_{\Gamma_r} f + \int_{\gamma_r} f =$$

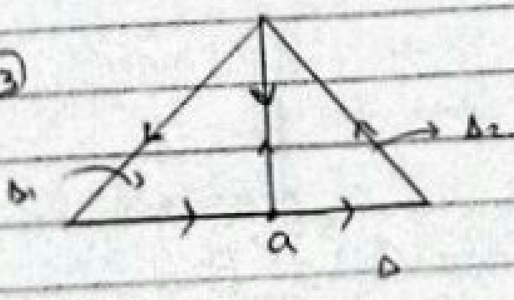
$$=0+\int_{\gamma_r} f = \int_{\gamma_r} f(z)\,dz$$

$\exists M>0: |f(z)| \leq M \ \forall z \in \gamma_r$

$\left|\int_\Delta f\right| = \left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \leq M(2r+r\omega) \leq M(2+\pi)r \to 0,\ r\to 0.$

↳ το ω το πολύ να φτάσει π. Είναι γωνία τριγώνου.

(3)

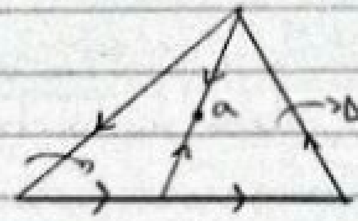



$\Delta=\Delta_1+\Delta_2$.

$$\int_\Delta f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f = 0+0=0$$

↳ το $a$ είναι κορυφή στο τρίγωνο $\Delta_2$.
Άρα $\int_\Delta f=0$ από 2η περίπτωση.

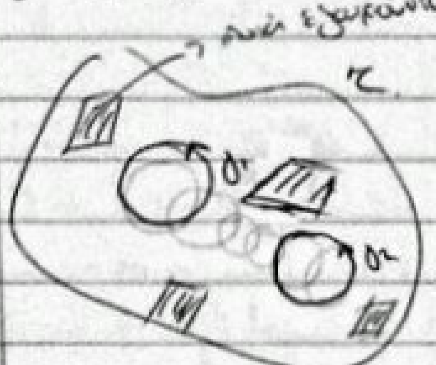
(4)




$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \Rightarrow \int_\Delta f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f = 0 + 0 = 0$

το a είναι σημείο πλευράς άρα $\int_{\Delta_1} f = 0$ από 3).

▸ $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ομοτοπικές.




Να τις φέρω τη μία πάνω στην άλλη χωρίς να περάσω πάνω σε "[illegible]".

$\gamma_1: z_1 = z_1(t),\ t \in [a,b]$

$\gamma_2: z_2 = z_2(t),\ t \in [a,b]$

$H(t,s),\ t \in [a,b],\ s \in [0,1]$

① H συνεχής.

② $H(t,s) \in \Omega,\ \forall\, t, s.$

③ Για $s=0$, $H(t,0) = z_1(t)$

Για $s=1$, $H(t,1) = z_2(t)$.

▸ Ω απλά συνεκτικό.

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ $\forall\, \gamma \subseteq \Omega$, 0-ομοτ.

<u>Θεώρημα</u>: $f: \Omega \to \mathbb{C}$, f ολόμορφη.

$\gamma_1, \gamma_2 \subseteq \Omega$, $\gamma_1 \sim \gamma_2$

$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

(χωρίς απόδειξη)

▸ Αν Ω απλά συνεκτικό, $\forall\, \gamma \subseteq \Omega$ ΣΤ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ολόμορφη,

τότε $\int_\gamma f = 0$ $\forall\, \gamma \subseteq \Omega$.